第八章 数列

模块一 等差、等比数列问题

第 1 节 等差、等比数列的基本公式（★★）

强化训练

1．（2022·南昌模拟·★）《张丘建算经》卷上第二十二题为："今有女善织，日益功疾．初日织五尺，今一月日织九匹三丈"．其意思为：今有一女子擅长织布，且从第二天起，每天比前一天多织相同量的布，若第一天织 5 尺布，现在一个月（按 30 天计）共织 390 尺布，则该女子最后一天织布的尺数为（　　）

（A）18　　（B）20　　（C）21　　（D）25

答案：C

解析：设该女子第 k 天织布的尺数为 $a_k(k=1,2,\cdots,30)$，

由于问的是 a_{30}，故求和用 $\frac{项数(首项+末项)}{2}$，

由题意，$a_1=5$ 且 $a_1+a_2+\cdots+a_{30}=\frac{30(a_1+a_{30})}{2}=390$，

解得：$a_{30}=21$．

2．（2022·南京模拟·★★）把 120 个面包全部分给 5 个人，使每人所得面包个数成等差数列，且较大的三份之和是较小的两份之和的 7 倍，则最小一份面包的个数为（　　）

（A）2　　（B）5　　（C）6　　（D）11

答案：A

解析：先把文字信息翻译成数列问题，设 5 个人分到的面包从少到多依次为 a_1，a_2，…，a_5，

设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，前 n 项和为 S_n，

由题意，$\begin{cases}a_3+a_4+a_5=7(a_1+a_2)\\S_5=120\end{cases}$，

所以 $\begin{cases}a_1+2d+a_1+3d+a_1+4d=7(a_1+a_1+d)\\5a_1+10d=120\end{cases}$，解得：$a_1=2$．

3．（2022·上海模拟·★★）已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，若 $a_4-a_5=2a_6$，则 $\frac{S_2}{a_3}$ 的值为_____．

答案：6

解析：设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，因为 $a_4-a_5=2a_6$，

所以 $a_1q^3-a_1q^4=2a_1q^5$，解得：$q=\frac{1}{2}$ 或 -1，

又 $\{a_n\}$ 各项均为正数，所以 $q=\frac{1}{2}$，

故 $\dfrac{S_2}{a_3}=\dfrac{a_1+a_2}{a_3}=\dfrac{a_1(1+q)}{a_1q^2}=\dfrac{1+q}{q^2}=6$.

4.（2023 • 全国甲卷 • ★★）已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，$S_5=5S_3-4$，则 $S_4=$（　　）

（A）7　（B）9　（C）15　（D）20

答案：C

解析：所给条件为前 n 项和，容易代公式，故直接代公式翻译，但需讨论公比为 1 的情况，

若 $q=1$，则 $a_n=1$，$S_5=5$，$5S_3-4=5\times3-4=11$，

不满足 $S_5=5S_3-4$，所以 $q\neq1$，

结合 $a_1=1$ 可得 $S_5=5S_3-4$ 即为 $\dfrac{1-q^5}{1-q}=5\cdot\dfrac{1-q^3}{1-q}-4$，

化简得：$q^4-5q^2+4=0$，

结合 $\{a_n\}$ 是正项数列且 $q\neq1$ 可解得：$q=2$，

所以 $S_4=\dfrac{1-q^4}{1-q}=15$.

5.（2022 • 北京模拟 • ★★）已知等差数列 $\{a_n\}$ 单调递增且满足 $a_1+a_8=6$，则 a_6 的取值范围是（　　）

（A）$(-\infty,3)$　（B）$(3,6)$　（C）$(3,+\infty)$　（D）$(6,+\infty)$

答案：C

解析：只给了一个等式，无法求出 a_1 和 d，但可以建立它们的关系，用于对 a_6 消元，

设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $a_6=a_1+5d$，因为 $a_1+a_8=6$，

所以 $a_1+a_1+7d=6$，故 $2a_1+7d=6$ ①，

因为 $\{a_n\}$ 单调递增，所以 $d>0$，

已知 d 的范围，于是消去 $a_6=a_1+5d$ 中的 a_1，用 d 表示，

由①可得 $a_1=3-\dfrac{7d}{2}$，所以 $a_6=a_1+5d=3-\dfrac{7d}{2}+5d=3+\dfrac{3d}{2}>3$.

6.（2022 • 西安一模 • ★★★）设 S_n 是等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，S_3，S_9，S_6 成等差数列，且 $a_4+a_7=2a_n$，则 $n=$_____.

答案：10

解析：先把 S_3，S_9，S_6 成等差数列这一条件用 a_1 和 q 翻译出来，看能得到什么，

设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，由题意，$2S_9=S_3+S_6$ ①，

由①可得 $q\neq1$，否则 $2S_9=2\times9a_1=18a_1$，

$S_3+S_6=3a_1+6a_1=9a_1$，从而 $2S_9\neq S_3+S_6$，矛盾，

所以式①即为 $2\cdot\dfrac{a_1(1-q^9)}{1-q}=\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\dfrac{a_1(1-q^6)}{1-q}$，

化简得：$2q^6-q^3-1=0$，故 $q^3=-\dfrac{1}{2}$ 或 1（舍去），

接下来可把另一条件也用 a_1 和 q 翻译出来，结合 $q^3=-\frac{1}{2}$ 求出 n，

$a_4+a_7=2a_n \Rightarrow a_1q^3+a_1q^6=2a_1q^{n-1} \Rightarrow q^{n-1}=\frac{1}{2}(q^3+q^6)$

$=-\frac{1}{8}=(-\frac{1}{2})^3=(q^3)^3=q^9$，所以 $n-1=9$，故 $n=10$.

7.（2022·广东模拟·★★★）已知 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均为等差数列，若 $a_1=b_2=6$，$a_4+b_5=9$，则 a_7+b_8 的值是_____.

答案：6

解法 1：不知道条件怎么翻译？那就试试用通项公式来表示已知的和要求的，看看它们的联系吧，

设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的公差分别为 d_1，d_2，

由题意，$a_1=6$，$b_2=b_1+d_2=6$ ①，

$a_4+b_5=(a_1+3d_1)+(b_1+4d_2)=6+3d_1+b_1+4d_2=9$ ②，

要求的 $a_7+b_8=(a_1+6d_1)+(b_1+7d_2)=6+6d_1+b_1+7d_2$ ③，

接下来需要通过①②式得到③式的值，观察发现式③中的 d_1 只有式②有，为了得到 $6d_1$，先把式②两倍，

由②可得 $12+6d_1+2b_1+8d_2=18$ ④，

对比④和③发现正好多一个 b_1+d_2，式①就有 b_1+d_2，

由④-①可得 $12+6d_1+b_1+7d_2=12$，所以 $6d_1+b_1+7d_2=0$，

代入③得 $a_7+b_8=6$.

解法 2：已知 a_1 和 b_2，可把它们作为初始项，用来翻译条件和结论，寻找两者之间的关系，

设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的公差分别为 d_1，d_2，因为 $a_4+b_5=$

$a_1+3d_1+b_2+3d_2=12+3(d_1+d_2)=9$，所以 $d_1+d_2=-1$，

故 $a_7+b_8=a_1+6d_1+b_2+6d_2=a_1+b_2+6(d_1+d_2)$

$=6+6+6\times(-1)=6$.

8.（2022·吉林模拟·★★★）若等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $\frac{1}{3}$，且 $a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{97}=90$，则 $\{a_n\}$ 的前 99 项和 $S_{99}=$_____.

答案：130

解析：注意到 a_1，a_4，a_7，…，a_{97} 构成公比为 q^3 的等比数列，故可先算 $a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{97}$，再看它与 S_{99} 的关系，

由题意，公比 $q=\frac{1}{3}$，$a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{97}=$

$\frac{a_1[1-(q^3)^{33}]}{1-q^3}=\frac{a_1(1-q^{99})}{1-q^3}=90$ ①，

我们要计算的 $S_{99}=\frac{a_1(1-q^{99})}{1-q}$，和式①对比发现可把式①的分母分解因式，凑出 S_{99}，

由①可得$\dfrac{a_1(1-q^{99})}{1-q^3}=\dfrac{a_1(1-q^{99})}{(1-q)(1+q+q^2)}=90$，

所以$S_{99}=\dfrac{a_1(1-q^{99})}{1-q}=90(1+q+q^2)=130$.

9．（2023·新高考Ⅰ卷·★★★）记S_n为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，设甲：$\{a_n\}$为等差数列，乙：$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$为等差数列，则（　　）

（A）甲是乙的充分条件但不是必要条件

（B）甲是乙的必要条件但不是充分条件

（C）甲是乙的充要条件

（D）甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

答案：C

解析：判断是否为等差数列，就看通项是否为$pn+q$或前 n 项和是否为An^2+Bn的形式，故直接设形式来分析，先看充分性，

若$\{a_n\}$为等差数列，则可设$S_n=An^2+Bn$，

此时$\dfrac{S_n}{n}=An+B$，满足等差数列的形式特征，

所以$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$是等差数列，故充分性成立；

再看必要性，此时可将$\dfrac{S_n}{n}$设为等差数列的通项形式，并由此求出a_n，加以判断，

若$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$是等差数列，则可设$\dfrac{S_n}{n}=pn+q$，

所以$S_n=pn^2+qn$ ①，从而$a_1=S_1=p+q$，

且当$n\ge 2$时，由①得：$a_n=S_n-S_{n-1}=2pn+q-p$，

显然$a_1=p+q$也满足上式，所以a_n满足等差数列的通项形式，

从而$\{a_n\}$是等差数列，必要性成立，故选 C.

【反思】$\{a_n\}$是等差数列的充要条件是通项为$pn+q$的形式，或前 n 项和S_n为An^2+Bn的形式，熟悉这一特征可巧解一些等差数列的概念判断题.

10．（2023·全国乙卷·★★★）记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，已知$a_2=11$，$S_{10}=40$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{|a_n|\}$的前 n 项和T_n.

解：（1）（已知条件都容易代公式，故直接用公式翻译，求出a_1和 d）

设$\{a_n\}$的公差为 d，则$a_2=a_1+d=11$ ①，

$S_{10}=10a_1+45d=40$ ②，

联立①②解得：$a_1=13$，$d=-2$，

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=13+(n-1)\times(-2)=15-2n$.

（2）（通项含绝对值，要求和，先去绝对值，观察发现 $\{a_n\}$ 前 7 项为正，从第 8 项起为负，故据此讨论）

当 $n\le 7$ 时，$a_n>0$，所以 $T_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$

$=a_1+a_2+\cdots+a_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n(13+15-2n)}{2}=14n-n^2$；

当 $n\ge 8$ 时，$T_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$

$=a_1+a_2+\cdots+a_7-a_8-a_9-\cdots-a_n$

$=2(a_1+a_2+\cdots+a_7)-(a_1+a_2+\cdots+a_n)$

$=2\times\dfrac{7\times(13+1)}{2}-\dfrac{n(13+15-2n)}{2}=n^2-14n+98$；

综上所述，$T_n=\begin{cases}14n-n^2,n\le 7\\ n^2-14n+98,n\ge 8\end{cases}$.

11．（2022·新高考Ⅱ卷·★★★）已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，$\{b_n\}$ 为公比为 2 的等比数列，且 $a_2-b_2=a_3-b_3=b_4-a_4$.

（1）证明：$a_1=b_1$；

（2）求集合 $\{k\,|\,b_k=a_m+a_1,1\le m\le 500\}$ 中元素的个数.

解：（1）（要证 $a_1=b_1$，所以把 $a_2-b_2=a_3-b_3=b_4-a_4$ 用 a_1，b_1，公差 d 来表示）

设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，因为 $\{b_n\}$ 的公比为 2，

且 $a_2-b_2=a_3-b_3=b_4-a_4$，

所以 $\begin{cases}a_1+d-2b_1=a_1+2d-4b_1\\ a_1+d-2b_1=8b_1-a_1-3d\end{cases}$，故 $\begin{cases}d=2b_1\\ 4d=10b_1-2a_1\end{cases}$，

（要证的是 $a_1=b_1$，所以应该用上面的两个式子消去 d，得出 a_1 和 b_1 的关系）

将 $d=2b_1$ 代入 $4d=10b_1-2a_1$ 可得 $4\times 2b_1=10b_1-2a_1$，

整理得：$a_1=b_1$.

（2）（所给集合中有 $b_k=a_m+a_1$，于是需计算 b_k 和 a_m，故先求出 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式）

设 $a_1=b_1=x(x\ne 0)$，由（1）可得 $d=2x$，

所以 $a_n=x+(n-1)\cdot 2x=(2n-1)x$，$b_n=x\cdot 2^{n-1}$，

（有了通项，可由 $b_k=a_m+a_1$ 建立 k 和 m 的等量关系，结合 $1\le m\le 500$ 求出 k 的范围）

由 $b_k=a_m+a_1$ 可得 $x\cdot 2^{k-1}=(2m-1)x+x$，化简得：$2^{k-2}=m$，

又 $1\le m\le 500$，所以 $1\le 2^{k-2}\le 500$，因为 $2^8=256<500$，

$2^9=512>500$，所以 $0\le k-2\le 8$，

从而 $2\le k\le 10(k\in\mathbf{N}^*)$，故集合 $\{k\,|\,b_k=a_m+a_1,1\le m\le 500\}$ 中元素的个数为 9.